www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 18 avril 1990
DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 6

N.B : La présentation et la rédaction seront prises en compte par la notation.
On s'efforcera de traiter les questions dans l'ordre.
Les résultats numériques seront encadrés.
Le problème est constitué de trois parties, très largement indépendantes.
On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des reels strictement positifs, $\mathbf{R}^{-*}$ l'ensemble des réels strictement négatifs.
On appelle polynôme normalisé tout polynôme non nul dont le coefficient dominant est égal à 1.

On rappelle que, I étant un intervalle de $\mathbf{R}$, a, b, c, et g étant des fonctions continues sur I à valeurs réelles, on appelle solution sur I de l'equation differentielle (E) :

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = g(x) \quad (E)$$

toute fonction f appartenant à $C^2(I,\mathbf{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in I,\ a(x)\,f''(x) + b(x)\,f'(x) + c(x)\,f(x) = g(x)$$

Partie I :

1°) b et c désignant deux réels fixés, résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle : $y'' + b\,y' + c\,y = 0$ (1)

Montrer que si $b^2 - 4c \geq 0$, toute solution non nulle admet au plus un zéro sur $\mathbf{R}$, et que si $b^2 - 4c < 0$, toute solution admet une infinité de zeros.

2°) a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)\,e^x$

b) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)\,e^x$

c) En déduire que si $b^2 - 4c \geq 0$, l'équation différentielle :

$y'' + b\,y' + c\,y = g(x)$ (g fonction continue sur R)

ou b et c sont deux réels fixés, peut admettre des solutions possédant au moins deux zéros sur $\mathbf{R}$.

3°) b et c désignant deux réels fixés, on considère l'équation :

$x^2\,y'' + b\,x\,y' + c\,y = 0$ (2) qu'on se propose de résoudre sur $\mathbf{R}^{+*}$ et $\mathbf{R}^{-*}$:

a) En posant $t = \ln|x|$, résoudre l'équation différentielle (2) sur $\mathbf{R}^{+*}$, ensuite sur $\mathbf{R}^{-*}$.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur b et c pour que toute solution non nulle de (2) sur $\mathbf{R}^{+*}$ admette au plus un zéro.

c) A quelle condition sur b et c peut-on trouver des solutions non nulles de (2) sur $\mathbf{R}$?

Partie II :

Dans cette partie, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, a, b, c sont des fonctions continûment dérivables sur I, et :

$$\forall x \in I,\ a(x) \neq 0$$

1°) On considère l'équation différentielle :

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0 \quad (3)$$

et x_0 est un élément de I.

En posant $y(x) = u(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)$,

montrer que (3) équivaut à : $u'' + q(x)\,u = 0$ (4)

où q est une fonction continue sur I, ce que l'on suppose désormais dans la suite.

2°) Préciser ce que devient l'équation (1) par cette transformation en supposant que $I = \mathbf{R}$ et que $x_0 = 0$.

3°) u désigne une solution non nulle de l'équation différentielle sur I :

$u'' + q(x)\,u = 0$ On suppose que : $\forall x \in I,\ q(x) \leq 0$

a) Montrer que s'il existait un réel x_0 dans I tel que : $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ u serait la fonction nulle sur I, ce qui est impossible.

b) Montrer que la fonction $u\,u'$ est croissante sur I.

c) On suppose que u admet un zero α sur I.
Montrer que : $\forall x \in I \setminus \{\alpha\},\ u(x) \neq 0$

En déduire le résultat suivant :

" Si q est négative ou nulle sur I, toute solution non nulle de : $u'' + q(x)\,u = 0$ admet au plus un zéro sur I ".

4°) On considère les équations différentielles

$$u'' + f(x)\,u = 0 \quad (E_1)$$
$$u'' + g(x)\,u = 0 \quad (E_2)$$

f et g étant des fonctions continues sur I, vérifiant : $\forall x \in I,\ f(x) > g(x)$

et u_1 (respectivement u_2) désigne une solution de (E_1) (respectivement de (E_2))

.../...

On suppose que (x_1, x_2) est un couple d'éléments de I tels que :

$x_1 < x_2$ $\quad u_2(x_1) = u_2(x_2) = 0$ $\quad \forall x \in]x_1, x_2[, u_2(x) > 0$

On suppose de plus que u_1 ne s'annule pas sur $]x_1, x_2[$

a) On définit W sur I par : $\forall x \in I, W(x) = u_1(x) u'_2(x) - u'_1(x) u_2(x)$
Montrer que W est strictement monotone sur $[x_1, x_2]$.

b) Montrer que : $\forall x \in]x_1, x_2[, u_1(x) > 0$ entraîne :
$W(x_1) \geqslant 0$ et $W(x_2) \leqslant 0$ et montrer que :
$\forall x \in]x_1, x_2[, u_1(x) < 0$ entraîne : $W(x_1) \leqslant 0$ et $W(x_2) \geqslant 0$
En déduire que l'hypothèse : $\forall x \in]x_1, x_2[, u_1(x) \neq 0$
est impossible.

c) En déduire que pour toute solution non nulle u_2 de (E_2), entre deux zéros consécutifs x_1 et x_2 de u_2, il y a au moins un zéro de u_1.

5°) On considère l'équation différentielle sur $I = \mathbf{R}^{+*}$: $u'' + q(x) u = 0$
On suppose que : $\exists K > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, q(x) \geqslant K$
Montrer que toute solution sur I de l'équation différentielle :
$u'' + q(x) u = 0$ admet une infinité de zeros.

Partie III :

On appelle F l'ensemble des fonctions f vérifiant : $f \in C^\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$
et $\forall k \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, \exists A_k, B_k \in \mathbf{R}^+$ tels que :
$\forall x \in \mathbf{R}^+, |f^{(k)}(x)| \leqslant A_k x^p + B_k$

1°) Montrer que F est un espace vectoriel.

2°) Soit φ l'application de F x F dans R définie par :

$$\forall (f,g) \in F \times F, \varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x}\, dx$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur F.

3°) f étant un élément de F, on appelle h la fonction définie par :
$\forall x \in \mathbf{R}^+, h(x) = x f'' + (1 - x) f'$ et on pose $h = T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de F.

b) Déterminer le noyau de T.

c) Résoudre sur $\mathbf{R}^{+*}$ l'équation différentielle : $x y'' + (1 - x) y' = 1$
En déduire que T n'est pas surjectif.

4°) Montrer que T est symétrique, c'est à dire que :
$\forall (f,g) \in F^2, \varphi(T(f), g) = \varphi(f, T(g))$
On se propose dans les questions qui suivent de trouver les valeurs propres de T.

5°) Montrer que si λ est valeur propre de T, nécessairement, λ est négatif ou nul. (On pourra par exemple supposer qu'il existe f non nulle dans F telle que : $T(f) = \lambda f$, et étudier : $\varphi(f, T(f))$).

6°) a) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'équation :
$T(f) = -n f$
admet des solutions polynômiales.

b) On appellera L_n le polynôme normalisé vérifiant : $T(L_n) = -n L_n$.
Déterminer L_1, L_2, L_3, L_4.

c) Déterminer la dimension du sous-espace propre de T associé à la valeur propre -n.

7°) a) Soit $\lambda \in \mathbf{R}^{-*} \setminus \mathbf{Z}^-$
Montrer que l'équation différentielle :
$x y'' + (1 - x) y' - \lambda y = 0$
admet une solution développable en série entière sur un intervalle $]-R, +R[$ $(R > 0)$, vérifiant $y(0) = 1$.
Préciser R.
Soit s cette solution.

b) Montrer que toute fonction u de $C^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ de l'équation différentielle :
$x u'' + (1 - x) u' - \lambda u = 0$ vérifie :
$u = u(0)\, s$

c) Montrer que s n'appartient pas à F.
En déduire que λ n'est pas valeur propre de T.
Donner le spectre de T.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail